(0)

Σε αυτές τις σημειώσεις περιλαμβάνονται οι ασκήσεις του δεύτερου μέρους της Θεωρίας του μαθήματος: Ειδικά Θέματα Γεωμετρίας (822).

Περιεχόμενα

1) Στις σελίδες 1-14 δίνεται η λεπτομερής περιγραφή της δευτέρου βαθμού καμπύλης (εν γένει) της μορφής: $ax^2+\beta xy+\gamma y^2+\delta x+\varepsilon y+\zeta=0$ για το τι παριστάνει και ποια είναι τα βασικά χαρακτηριστικά της.

2) Στις σελίδες 15-20 μελετάται η καμπύλη με εξίσωση $2x^2+4xy+5y^2-6=0$ και δίνεται η επαλήθευση

3) Στις σελίδες 21-38 μελετάται η καμπύλη με εξίσωση $x^2+xy+y^2+x+y+a=0$, όπου a είναι παράμετρος και δίνεται η επαλήθευση.

4) Στις σελίδες 39-53 μελετάται η καμπύλη με εξίσωση: $x^2+2xy+y^2+ax+\beta y+\gamma=0$, όπου a, β, γ παράμετροι και δίνεται η επαλήθευση στην περίπτωση όπου: $a=16$, $\beta=8$ και $\gamma=64$.

Περιγράφουμε λεπτομερώς την διαδικασία με την οποία προσδιορίζουμε το είδος και τα χαρακτηριστικά της γενικής μορφής καμπύλης δευτέρου βαθμού της μορφής:

$a x^2 + \beta x y + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0$, όπου

$a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ισχύει

$\beta \neq 0$.

Περιγραφή:

Η τετραγωνική μορφή της καμπύλης (την ονομάζουμε καμπύλη εν γένει) C με την παραπάνω εξίσωση έχει τετραγωνική μορφή $q : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$

με τύπο: $q((x \ \ y)) = a x^2 + \beta x y + \gamma y^2$

για κάθε $(x \ \ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Ο προσαρτημένος πίνακας A της q είναι ο

$$A := \begin{pmatrix} a & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}.$$

Από τον πίνακα A ορίζεται η συμμετρική γραμμική απεικόνιση $\varphi: \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ με τον τύπο: $\varphi((x\ y)) = (x\ y)\cdot A$ για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

1) <u>Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές της φ</u> (ή αλλιώς του A).

Θεωρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της φ (ή του A) που είναι το: $\det(A - \lambda I_2)$ όπου $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

δηλαδή το: $\begin{vmatrix} a-\lambda & \dfrac{\beta}{2} \\ \dfrac{\beta}{2} & \gamma-\lambda \end{vmatrix}$

Βρίσκουμε: $\det(A-\lambda I_2) = \lambda^2 - (a+\gamma)\lambda + \left(a\gamma - \dfrac{\beta^2}{4}\right)$.

Λύνουμε την εξίσωση: $\det(A-\lambda I_2) = 0$ ως προς λ και βρίσκουμε τις (πάντα) 2 ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 της φ όπου $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $\lambda_1\cdot\lambda_2 \neq 0$ τότε η καμπύλη C θα είναι συνήθως έλλειψη ή υπερβολή, ενώ εάν $\lambda_1 = 0$ (και αναγκαστικά $\lambda_2 \neq 0$), θα έχουμε

ότι συνήθως η C είναι μια παραβολή.
(Λέμε συνήθως αν εξαιρέσουμε τις περιπτώσεις όπου η C εκφυλίζεται σε μια ή δυο ευθείες ή ένα μόνο σημείο ή το κενό σύνολο).

2) Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα της φ (ή του A)

Τα ιδιοδιανύσματα της φ τα βρίσκουμε λύνοντας τις γραμμικές εξισώσεις:

$\varphi((x\ y)) = \lambda_1 (x\ y) \rightarrow$ ιδιοδιανύσματα της λ_1 (1)

$\varphi((x\ y)) = \lambda_2 (x\ y) \rightarrow$ ιδιοδιανύσματα της λ_2 (2).

Από καθεμία από τις παραπάνω δυο εξισώσεις (1) και (2) φτιάχνουμε μια εξίσωση γραμμική ομογενή γιατί οι εξισώσεις οδηγούν σε ένα σύστημα δυο εξισώσεων η καθε μια όπου οι δυο εξισώσεις είναι όμοιες. Έστω

$V(\lambda_1) = \langle u_1 \rangle$ και $V(\lambda_2) = \langle u_2 \rangle$ οι ιδιόχωροι των ιδιοτιμών λ_1 και λ_2 αντίστοιχα που παράγονται από τα μη μηδενικά διανύσματα u_1 και u_2 αντίστοιχα, που βρίσκουμε από τις παραπάνω εξισώσεις (1) και (2).

④

3) Κανονικοποίηση των ιδιοδιανυσμάτων

Επιλέγουμε $x \in \mathbb{R}$: $\|x u_1\| = 1$ και $y \in \mathbb{R}$: $\|y u_2\| = 1$.

Έστω $(P_1 \; P_2) = x u_1$ και $(P_3 \; P_4) = y u_2$.

Ορίζουμε τον ορθογώνιο πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}.$$

Ορίζουμε την γραμμική ισομετρία $g : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$

με τύπο:

$$g((x \; y)) = (x \; y) \cdot P^t \text{ για κάθε } (x \; y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Ορίζουμε επίσης την γραμμική ισομετρία

$g^{-1} : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ με τύπο:

$$g^{-1}((x \; y)) = (x \; y) \cdot P \text{ για κάθε } (x \; y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Βρίσκουμε τους τύπους που ορίζουν τις g και g^{-1}. Έστω $g((x\;y)) = (g_1((x\;y)) \;\; g_2((x\;y)))$ να είναι οι δυο συντεταγμένες γραμμικές συναρτήσεις της g, (τυπικά $g_1 := pr_1 \circ g$, $g_2 := pr_2 \circ g$)

4) Σχηματίζουμε την εξίσωση:

$$\gamma_0 \cdot g_1((x\ y)) + \delta_0 \cdot g_2((x\ y)) = \delta x + \varepsilon y \quad (*)$$

Στην παραπάνω εξίσωση (*) τα g_1, g_2, δ, ε είναι γνωστά και θεωρούμε αγνώστους τα γ_0, δ_0.
Απαιτούμε να ισχύει η (*) για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ και προσδιορίζουμε τα μοναδικά γ_0, δ_0 ώστε να ισχύει αυτό.
Αυτό γίνεται ως εξής:
Θέτουμε $(x\ y) = e_1 = (1\ 0)$ στην (*) και παίρνουμε από την (*) μια γραμμική εξίσωση με δυο αγνώστους τα γ_0, δ_0.
Θέτουμε επίσης $(x\ y) = e_2 = (0\ 1)$ στην (*) και παίρνουμε και μια δεύτερη γραμμική εξίσωση με αγνώστους τα γ_0, δ_0. Λύνουμε το γραμμικό σύστημα των δυο εξισώσεων που βρίσκουμε και προσδιορίζουμε τα γ_0, δ_0.
Εδώ μας χρειάστηκε ο τύπος της g, για να βρούμε τα γ_0, δ_0.

Έστω C να είναι η αρχική μας εξίσωση, δηλαδή $C := \{ (x \ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2} \mid ax^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = 0 \}$.

Ορίζουμε και την εξίσωση:

$$C' := \{ (x y) \in \mathbb{R}^{1\times 2} \mid \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \gamma_0 x + \delta_0 y + \zeta = 0 \}.$$

Στην εξίσωση της C' τα λ_1, λ_2 είναι οι ιδιοτιμές της φ που βρήκαμε πριν και τα γ_0, δ_0 είναι αυτά που προσδιορίσαμε στο βήμα 4.

Ως γνωστόν έχουμε: $C = g^{-1}(C')$.

Έτσι ανάγουμε την μελέτη της C στην μελέτη της C', όπου έχουμε "απαλλαγεί" από τον όρο βxy της C.

Τώρα διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

1) $\lambda_1 \neq 0$ και $\lambda_2 \neq 0$.

2) $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 \neq 0$

3) $\lambda_1 \neq 0$ και $\lambda_2 = 0$.

Οι περιπτώσεις 2) και 3) αντιμετωπίζονται παρόμοια.

Για αυτό περιγράφουμε τις περιπτώσεις 1) και 2).

Περίπτωση 1

$\lambda_1 \neq 0$ και $\lambda_2 \neq 0$ (και φυσικά $\lambda_1 \neq \lambda_2$).

Θέτουμε $c_1 := -\frac{\gamma_0}{2\lambda_1}$ και $c_2 := -\frac{\delta_0}{2\lambda_2}$ και

$c_0 := (c_1 \ c_2)$.

Ορίζουμε από την καμπύλη C' την συνάρτηση

$f : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$f((x\ y)) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \gamma_0 x + \delta_0 y + J$ για

κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Ορίζουμε την καμπύλη:

$$C_{c_0} := \{(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2} \mid \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + f(c_0) = 0\}.$$

Ορίζουμε την μεταφορά $t_{c_0} : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ με

τύπο: $t_{c_0}(v) = c_0 + v$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Τότε ως γνωστόν έχουμε ότι:

$$C = (g^{-1} \circ t_{c_0})(C_{c_0})$$

Χαράζουμε κατάλληλα την καμπύλη C_{0} που βρήκαμε ώστε να την φέρουμε στην κανονική μορφή μιας έλλειψης ή υπερβολής (στις συνήθεις περιπτώσεις). Προσδιορίζουμε τα πλήρη χαρακτηριστικά της C_{0} δηλαδή τις εστίες E_1 και E_2 και το σταθερό άθροισμα αν είναι έλλειψη ή την σταθερή διαφορά αν είναι υπερβολή, απο την μορφή στην οποία την φέραμε χρησιμοποιώντας τον πίνακα με τα χαρακτηριστικά που γνωρίζουμε:

(Για παράδειγμα: Αν έχουμε φτάσει σε έλλειψη της μορφής: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $a > \beta > 0$, τότε το σταθερό άθροισμα της έλλειψης είναι $2a$, θέτουμε $\gamma^2 = a^2 - \beta^2$ με $\gamma > 0$ και τότε οι δυο εστίες E_1 και E_2 της έλλειψης είναι οι $E_1 = (\gamma \; 0)$ και $E_2 = (-\gamma \; 0)$).

Τώρα η αρχική μας καμπύλη C είναι έλλειψη αν η C_{c_0} είναι έλλειψη ή είναι υπερβολή αν η C_{c_0} είναι υπερβολή και έχει το ίδιο άθροισμα (ή διαφορά) με την C_{c_0} αν είναι έλλειψη (ή υπερβολή), αντίστοιχα.

Οι εστίες της C είναι οι:

$$E_1' = (g^{-1} \circ t_{c_0})(E_1) \text{ και } E_2' = (g^{-1} \circ t_{c_0})(E_2)$$

Παρατήρηση. Σε αυτό το τελικό στάδιο μας χρειάζεται ο τύπος της g^{-1}.

2η περίπτωση

Έστω ότι $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 \neq 0$.

Θέτουμε $c_2 := -\dfrac{\delta_0}{2\lambda_2}$ και $c_0 := (c_1 \; c_2)$, για $c_1 \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$

με τύπο: $f((x \; y)) = \lambda_2 y^2 + \gamma_0 x + \delta_0 y + J_0 \; \forall (x y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Λύνουμε την εξίσωση $f(c_0) = 0$ ως προς c_1

που είναι γραμμική ως προς c_1 και θέτουμε το c_1.

Ορίζουμε την καμπύλη:

$$C_{c_0} := \{(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2} \mid \lambda_2 y^2 + \gamma_0 x = 0\}.$$

Στην συνήθη περίπτωση ($\gamma_0 \neq 0$) η C_{c_0} είναι παραβολή.

Χειριζόμαστε την εξίσωση της C_{c_0} και την φέρνουμε στην κανονική μορφή παραβολής που είναι η: $y^2 = 2\rho x$ όπου $\rho \neq 0$ ($\rho > 0$ ή $\rho < 0$) → παράμετρος παραβολής

Προσοχή αυτό είναι ρ μικρό μη το μπερδέψουμε με τον πίνακα P που ορίσαμε προηγούμενα (με P κεφαλαίο).

Τότε η παραβολή έχει εστία $E = \left(\frac{\rho}{2}\ 0\right)$ και διευθετούσα με καρτεσιανή εξίσωση: $x = -\frac{\rho}{2}$ (φυσικά αν $\rho < 0$ το $-\rho > 0$ στον τύπο $x = -\frac{\rho}{2}$).

Εδώ για παράδειγμα παίρνουμε:

$$\lambda_2 y^2 + \gamma_0 x = 0 \Rightarrow \lambda_2 y^2 = -\gamma_0 x \Rightarrow y^2 = -\frac{\gamma_0}{\lambda_2} x$$

$$\Rightarrow y^2 = 2 \cdot \left(-\frac{\gamma_0}{2\lambda_2}\right) \cdot x$$, άρα παράμετρος $\rho = -\frac{\gamma_0}{2\lambda_2}$.

Η εστία της αρχικής εξίσωσης C είναι

$E' = (g^{-1} \circ t_{c_0})(E)$, όπου όπως πριν $t_{c_0} : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$

είναι η μεταφορά t_{c_0} με τύπο: $t_{c_0}(v) = c_0 + v, \forall v \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

<u>Προσοχή</u>

Πως βρίσκουμε την διευθετούσα δ' της αρχικής καμπύλης C απο την διευθετούσα δ της παραβολής C_{c_0} , δηλαδή την ευθεία με καρτεσιανή εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

Η διευθετούσα δ με καρτεσιανή εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$ αν //την δούμε// σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}^{1\times 2}$ είναι το εξής σύνολο:

$$\delta := \left\{ \left(-\frac{p}{2} \quad y \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Άρα $t_{c_0}(\delta) = \left\{ t_{c_0}\left(\left(-\frac{p}{2} \quad y \right)\right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ c_0 + \left(-\frac{p}{2} \quad y \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\} =$$

12

$$= \left\{ (c_1 \;\; c_2) + \left(-\frac{p}{2} \;\; y\right) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \left(c_1 - \frac{p}{2} \;\; c_2 + y\right) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \left(c_1 - \frac{p}{2} \;\; y\right) \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}.$$ Άρα η

$t_{c_0}(\delta)$ είναι η ευθεία με καρτεσιανή εξίσωση $x = c_1 - \frac{p}{2}$.

Έτσι εαν $g^{-1}((x \; y)) = (g_3((x \; y)) \;\; g_4((x \; y)))$ για κάθε $(x \; y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, δηλαδή εαν g_3, g_4 είναι οι συντεταγμένες συναρτήσεις της g^{-1} (τυπικά $g_3 = pr_1 \circ g^{-1}$, $g_4 = pr_2 \circ g^{-1}$, όπου $pr_1 : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$ με τύπο $pr_1((x \; y)) = x$ για κάθε $(x \; y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ και $pr_2((x \; y)) = y$, για κάθε $(x \; y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$) τότε έχουμε:

$$\delta' = (g^{-1} \circ t_{c_0})(\delta) = g^{-1}(t_{c_0}(\delta)) =$$

$$= g^{-1}\left(\left\{\left(c_1 - \frac{p}{2} y\right) \middle| y \in \mathbb{R}\right\}\right)$$

$$= \left\{ g^{-1}\left(\left(c_1 - \frac{p}{2} y\right)\right) \middle| y \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{ \left(g_3\left(\left(c_1 - \frac{p}{2} y\right)\right) \; g_4\left(\left(c_1 - \frac{p}{2} y\right)\right)\right) \middle| y \in \mathbb{R}\right\}$$

και φτάνουμε την δ' στην διανυσματική της μορφή $t_\kappa(L)$ για κάποιο διάνυσμα $\kappa \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ και κάποια ευθεία L του $\mathbb{R}^{1\times 2}$ που διέρχεται από το 0.

Έτσι η διευθετούσα δ' της αρχικής καμπύλης C είναι η $\delta' = t_\kappa(L)$. Έχοντας υπολογίσει τα E' εστία και δ' διευθετούσα της C έχουμε προσδιορίσει τα βασικά χαρακτηριστικά που προσδιορίζουν πλήρως την C. Αυτά πρέπει να προσδιοριστούν και στην άσκηση.

Η περίπτωση 3) με $\lambda_1 \neq 0$ και $\lambda_2 = 0$ είναι εντελώς παρόμοια με την περίπτωση 2).
Εξάλλου πάντα μπορούμε την αποφύγουμε παίρνοντας την περίπτωση 2) αν επιλέξουμε να είναι η $\lambda_1 = 0$ όταν προσδιορίζουμε τις ιδιοτιμές της φ.

(15)

Να μελετηθεί η καμπύλη με εξίσωση:
$2x^2+4xy+5y^2-6=0$. Δηλαδή να ευρεθεί τι καμπύλη παριστάνει και ποιά είναι τα χαρακτηριστικά της γνωρίσματα.

Λύση

Η τετραγωνική μορφή της καμπύλης είναι η
$q: \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$ με τύπο: $q((x\ y)) = 2x^2+4xy+5y^2$
για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Ο πίνακας της τετραγωνικής μορφής είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $\det(A-\lambda I_2)$. Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Longleftrightarrow \lambda^2-7\lambda+6=0$. Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 6$

16 (2)

Θεωρούμε την $f: \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ με τύπο:

$$f((x\ y)) = (x\ y)\cdot A \quad , \forall\ (x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Έχουμε:

$$f((x\ y)) = (2x+2y \quad 2x+5y) \quad \forall\ (x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

<u>Ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda_1 = 1$.</u>

Τα βρίσκουμε λύνοντας το γραμμικό σύστημα που προκύπτει απο την εξίσωση,

$$f((x\ y)) = 1\cdot (x\ y).$$

Παίρνουμε οτι ο ιδιόχωρος $V(1)$ που παράγεται απο την ιδιοτιμή 1 είναι ο

$$V(1) = \{\lambda(-2\ \ 1) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle(-2\ \ 1)\rangle$$

<u>Ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής $\lambda_2 = 6$</u>

Τα βρίσκουμε λύνοντας το γραμμικό σύστημα που προκύπτει απο την εξίσωση:

$$f((x\ y)) = 6\cdot (x\ y).$$

Παίρνουμε ότι ο ιδιόχωρος που παράγεται από την ιδιοτιμή 6 είναι ο

$V(6) = \{ \lambda (1\ 2) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \langle (1\ 2) \rangle$.

Κανονικοποίηση των ιδιοδιανυσμάτων:

Παίρνουμε $u_1 \in V(1)$ με $\|u_1\| = 1$.

Έστω $x \in \mathbb{R} : \| x(-2\ 1) \| = 1 \iff x^2 \| (-2\ 1) \|^2 = 1^2$

$\iff x^2 ((-2)^2 + 1^2) = 1$. Αρκεί να πάρουμε $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ και

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2\ 1)$. Παρόμοια παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1\ 2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\ \ \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ με

$\|u_2\| = 1$.

Ορίζουμε τον ορθογώνιο πίνακα

$$P := \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = P^t.$$

(18) (4)

Απο των P ορίζεται η

$g: \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ με τύπο:

$$g((x\ y)) = (x\ y)P^t = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(-2x+y) \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(x+2y)\right)$$

για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Επειδή $P = P^t$ έχουμε ότι

$g = g^{-1}$ και g και g^{-1} είναι γραμμικές ισομετρίες

και επί.

Θέτουμε $C := \{(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2} \mid 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6 = 0\}$

και

$C' := \{(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2} : x^2 + 6y^2 - 6 = 0\}$.

Η C' είναι η έλλειψη με εξίσωση:

$$\frac{x^2}{\sqrt{6}^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$ με σταθερό άθροισμα

$2a = 2\sqrt{6}$, $b = 1$ και $\gamma^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{5}$.

Άρα οι εστίες της C' είναι οι

$E_1 = (\sqrt{5}, 0)$, $E_2 = (-\sqrt{5}\ 0)$

Από τα έχουμε ότι:

$C = g^{-1}(C)$.

Οι εστίες της C είναι οι

$g^{-1}(E_1) = (-2 \;\; 1)$ και $g^{-1}(E_2) = (2 \;\; -1)$.

Άρα δείξαμε ότι η εξίσωση

$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6 = 0$ παριστάνει έλλειψη με

εστίες τα σημεία $(-2 \;\; 1)$ και $(2 \;\; -1)$.

Επαλήθευση

Έστω $M \in C$. Τότε πρέπει να ισχύει για $M = (x \;\; y)$

$$d(M, (-2 \;\; 1)) + d(M, (2 \;\; -1)) = 2\sqrt{6} \iff$$

$$\iff \|(x \;\; y) - (-2 \;\; 1)\| + \|(x \;\; y) - (2 \;\; -1)\| = 2\sqrt{6} \iff$$

$$\iff \|(x+2 \;\; y-1)\| + \|(x-2 \;\; y+1)\| = 2\sqrt{6} \iff$$

$$\iff \sqrt{(x+2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\iff$$

$$\sqrt{(x^2+y^2+5) + (4x-2y)} + \sqrt{(x^2+y^2+5) - (4x-2y)} = 2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow$$

$$\sqrt{(x^2+y^2+5)+(4x-2y)} = 2\sqrt{6} - \sqrt{(x^2+y^2+5)-(4x-2y)}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+5+4x-2y =$$

$$= 4\cdot 6 + x^2+y^2+5-(4x-2y) - 4\sqrt{6}\sqrt{(x^2+y^2+5)-(4x-2y)}$$

$$\Rightarrow 6-(2x-y) = \sqrt{6}\sqrt{(x^2+y^2+5)-(4x-2y)}$$

$$\Rightarrow$$

$$(6-(2x-y))^2 = 6\cdot(x^2+y^2+5-4x+2y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36+(2x-y)^2-12(2x-y) =$$

$$= 6x^2+6y^2+30-24x+12y \Rightarrow$$

$$36+4x^2+y^2-4xy-24x+12y =$$

$$= 6x^2+6y^2+30-24x+12y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2x^2+5y^2+4xy-6=0}$$

. Άρα δείξαμε με κατευθείαν υπολογισμό ότι η έλλειψη με εστίες $(-2\ 1)$ και $(2\ -1)$ και σταθερό άθροισμα $2\sqrt{6}$ έχει εξίσωση $2x^2+5y^2+4xy-6=0$.

Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση:

$$x^2+xy+y^2+x+y+a=0 \quad \text{για } a\in\mathbb{R}.$$

Να ευρεθεί τι καμπύλη παριστάνει η παραπάνω εξίσωση για τις διάφορες τιμές του $a\in\mathbb{R}$ και να προσδιοριστούν σε κάθε περίπτωση τα χαρακτηριστικά της.

<u>Λύση</u>

Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή της καμπύλης είναι η $q:\mathbb{R}^{1\times 2}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$q((x\ y))=x^2+xy+y^2, \text{ για κάθε } (x\ y)\in\mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Ο πίνακας A της q είναι ο

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}.$$

<u>Ιδιοτιμές του A</u>:

Έχουμε για $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$A-\lambda I_2=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda & 1/2\\ 1/2 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

<u>Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:</u>

$$\det(A-\lambda I_2)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda-1)^2-\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-2\lambda+\frac{3}{4}=0.$$

<u>Ιδιοτιμές:</u> $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{3}{2}$.

Προσδιορισμός των ιδιοχώρων $V\left(\frac{1}{2}\right)$ και $V\left(\frac{3}{2}\right)$ των ιδιοτιμών λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.

Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση $\varphi:\mathbb{R}^{1\times 2}\to\mathbb{R}^{1\times 2}$ με τύπο: $\varphi((x\ y))=(x\ y)\cdot A$ για κάθε $(x\ y)\in\mathbb{R}^{1\times 2}$.

Έχουμε: για $(x\ y)\in\mathbb{R}^{1\times 2}$

$$\varphi((x\ y))=(x\ y)\cdot A=(x\ y)\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} x+\frac{1}{2}y & \frac{1}{2}x+y \end{pmatrix}.$$

23

3

Έχουμε δείξει στην θεωρία ότι οι ιδιοτιμές της φ είναι οι ιδιοτιμές $1/2$ και $\frac{3}{2}$ του πίνακα A.

Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα της φ.

Ιδιοδιανύσματα της φ που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $1/2$. Έστω $V(\frac{1}{2})$ και $V(\frac{3}{2})$ να είναι αντίστοιχα οι ιδιόχωροι της φ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $1/2$ και $3/2$ αντίστοιχα.

Έστω $(x_1\ \ y_1) \in V(\frac{1}{2})$. Τότε έχουμε:

$$\varphi((x_1\ \ y_1)) = \frac{1}{2}(x_1\ \ y_1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1 + \frac{1}{2}y_1 \quad \frac{1}{2}x_1 + y_1\right) = \left(\frac{1}{2}x_1 \quad \frac{1}{2}y_1\right).$$

Απο αυτή την ισότητα παίρνουμε τις δύο ισοδύναμες εξισώσεις:

$$x_1 + \frac{1}{2}y_1 = \frac{1}{2}x_1 \text{ και } \frac{1}{2}x_1 + y_1 = \frac{1}{2}y_1.$$

Απο την πρώτη παίρνουμε ότι:

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -x_1.$$

Άρα $V(\frac{1}{2}) = \{(x\ \ -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1\ \ -1) : x \in \mathbb{R}\}$
$= \langle (1\ \ -1) \rangle$. Δηλαδή ο $V(\frac{1}{2})$ είναι

ο διανυσματικός υπόχωρος διάστασης 1 του $\mathbb{R}^{1\times2}$ που παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $(1\ \ -1)$ της φ.

Παρόμοια για ~~τον~~ ιδιόχωρο $V(\frac{3}{2})$ έχουμε:

Έστω $(x_2\ \ y_2) \in V(\frac{3}{2})$. Τότε:

$$\varphi((x_2\ \ y_2)) = \frac{3}{2}(x_2\ \ y_2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(x_2 + \frac{1}{2}y_2\ \ \ \frac{1}{2}x_2 + y_2\right) = \left(\frac{3}{2}x_2\ \ \ \frac{3}{2}y_2\right).$$

Από αυτή την ισότητα έχουμε:

$$x_2 + \frac{1}{2}y_2 = \frac{3}{2}x_2 \Rightarrow y_2 = x_2.$$

Άρα $V(\frac{3}{2}) = \{(x\ \ x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x(1\ \ 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$= \langle (1\ \ 1) \rangle$, δηλαδή ο $V(\frac{3}{2})$ είναι ο διανυσματικός χώρος διάστασης 1 του $\mathbb{R}^{1\times2}$ που παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα $(1\ \ 1)$ της φ.

Επειδή $\langle (1\ \ -1), (1\ \ 1) \rangle = 1\cdot1 + (-1)\cdot1 = 0$ έχουμε ότι: $V(\frac{1}{2}) \perp V(\frac{3}{2})$ ως γνωστόν (το έχουμε δείξει).

25 5

Κανονικοποίηση των ιδιοδιανυσμάτων.

Έστω $u_1 \in V(\frac{1}{2})$ με $\|u_1\|=1 \Leftrightarrow \|x(1\ \ -1)\|=1$ για κάποιο $x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x|\cdot\|(1\ \ -1)\|=1 \Rightarrow$

$x^2\cdot\|(1\ \ -1)\|^2=1 \Rightarrow x^2(1^2+(-1)^2)=1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι μια από τις λύσεις (όποια θέλουμε) που ικανοποιεί την $\|x(1\ \ -1)\|=1$. Άς πάρουμε

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ -1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Παρόμοια έστω $u_2 \in V(\frac{3}{2})$ με $\|u_2\|=1$. Έστω $u_2=x(1\ \ 1)$. Έχουμε $1=\|x(1\ \ 1)\| \overset{\text{όμοια}}{\Rightarrow} x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι μια από τις λύσεις της $\|x(1\ \ 1)\|=1$. Άρα μπορούμε να πάρουμε $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Θεωρούμε τον ορθογώνιο πίνακα

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(26)

Από τον P ορίζουμε την γραμμική απεικόνιση

$g: \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ με τύπο:

$g((x\ y)) = (x\ y)\cdot P^t$ για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

<u>Τύπος της g.</u>

Έχουμε για $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$:

$$g((x\ y)) = (x\ y)\cdot P^t = (x\ y)\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= (x\ y)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x\ y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x-y & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) & \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{pmatrix}.$$

Άρα οι συντεταγμένες συναρτήσεις $g_1: \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$ και $g_2: \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$ της g είναι οι $g_1 = pr_1 \circ g$ και $g_2 = pr_2 \circ g$ όπου:

pr_1 είναι η πρώτη προβολή του $\mathbb{R}^{1\times 2}$, δηλαδή η γραμμική συνάρτηση $pr_1 : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$pr_1((x\ y)) = x$ για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ και

pr_2 είναι η δεύτερη προβολή του $\mathbb{R}^{1\times 2}$ δηλαδή η γραμμική συνάρτηση $pr_2 : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$pr_2((x\ y)) = y$ για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Άρα έχουμε: $g_1((x\ y)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$, για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ και

$g_2((x\ y)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Ο γραμμικός όρος της αρχικής καμπύλης μας είναι ο $x+y$.

Άρα ψάχνουμε να βρούμε $\gamma_0, \delta_0 \in \mathbb{R}$:

$\gamma_0 g_1((x\ y)) + \delta_0 \cdot g_2((x\ y)) = x+y$ για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ $(*)$.

Τα γ_0, δ_0 θα τα βρούμε από την $(*)$ παίρνοντας για $(x\ y)$ τα μοναδιαία διανύσματα $e_1 = (1\ 0)$ και $e_2 = (0\ 1)$.

(28)

Απο την (*) για $(x\ y) = (1\ 0)$ έχουμε

$\gamma_0 \cdot g_1((1\ 0)) + \delta_0 \cdot g_2((1\ 0)) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \gamma_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow \gamma_0 + \delta_0 = \sqrt{2}$.

Απο την (*) για $(x\ y) = (0\ 1)$ έχουμε

$\gamma_0 \cdot g_1((0\ 1)) + \delta_0 \cdot g_2((0\ 1)) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \gamma_0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \delta_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow -\gamma_0 + \delta_0 = \sqrt{2}$.

Αρα βρίσκουμε τα γ_0, δ_0 λύνοντας το γραμμικό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0 + \delta_0 &= \sqrt{2} \\ -\gamma_0 + \delta_0 &= \sqrt{2} \end{aligned}\right\}.$$

Παίρνουμε: $\gamma_0 = 0$, $\delta_0 = \sqrt{2}$.

Θεωρούμε τώρα την αρχική καμπύλη

$C := \{(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2} \mid x^2 + xy + y^2 + x + y + a = 0\}$

και την

$$C' := \{(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2} \mid \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \sqrt{2}y + a = 0\}.$$

Έχουμε δείξει ότι: $C = g^{-1}(C')$ όπου g^{-1} είναι η αντίστροφη απεικόνιση της g. Ας υπολογίσουμε τον τύπο της g^{-1} γιατί θα μας χρειαστεί. Έχουμε δείξει ότι:

$g^{-1}((x\ y)) = (x\ y)\cdot P$ για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Άρα

$$g^{-1}((x\ y)) = (x\ y)\cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = (x y)\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(x\ y)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x+y & -x+y \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)\right), \forall (x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Παίρνουμε $c_0 = (c_1\ c_2) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Θεωρούμε την μεταφορά $t_{c_0} : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ με τύπο $t_{c_0}(v) = c_0 + v$, $\forall v \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

30

10

Θέτουμε $C_{c_0} = t_{c_0}^{-1}(C')$. Έστω $u \in C_{c_0}$. Έχουμε $u \in t_{c_0}^{-1}(C') \Rightarrow t_{c_0}(u) \in C'$.

Έστω $u = (u_1 \ u_2)$. Έχουμε

$t_{c_0}(u) = c_0 + u = (c_1 + u_1 \ \ c_2 + u_2)$.

Άρα $t_{c_0}(u) \in C' \Leftrightarrow (c_1 + u_1 \ \ c_2 + u_2) \in C' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(c_1+u_1)^2 + \frac{3}{2}(c_2+u_2)^2 + \sqrt{2}\,(c_2+u_2) + a = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{3}{2}u_2^2 + c_1 u_1 + (3c_2 + \sqrt{2})u_2 + f(c_0) = 0$$

όπου $f : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f((x \ y)) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \sqrt{2}y + a, \ \forall (x \ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Επιλέγουμε c_0 τέτοιο ώστε:

$c_1 = 0$ και $3c_2 + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ και $c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

Άρα $c_0 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$. Τότε έχουμε

$f(c_0) = a - \frac{1}{3}$. Άρα για $c_0 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ έχουμε:

$$C_{c_0} := \left\{ (x \ y) \ \middle| \ \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \left(a - \frac{1}{3}\right) = 0 \right\}$$

Έχουμε τώρα:

$$t_{c_0}(C_{c_0}) = C' \text{ και } C = g^{-1}(C'). \text{ Άρα}$$

$$C = g^{-1}(t_{c_0}(C_{c_0})) = (g^{-1} \circ t_{c_0})(C_{c_0}).$$

Έτσι για να δούμε τι είναι η αρχική καμπύλη C αρκεί να δούμε τι είναι η C_{c_0} για

$$c_0 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1) $a > \frac{1}{3}$. Τότε $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 + a - \frac{1}{3} > 0$

$\forall (x\ y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ και άρα $C_{c_0} = \emptyset$ και άρα $C = \emptyset$.

2) $a = \frac{1}{3}$. Τότε η εξίσωση $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 = 0$

αληθεύει μόνο για $(x\ y) = (0\ 0)$ και άρα

$C_{c_0} = \{(0\ 0)\}$ και άρα $C = \{(g^{-1} \circ t_{c_0})((0\ 0))\}$

$= g^{-1}(c_0) = g^{-1}\left(\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) = \left(-\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\right).$

Άρα αν $a = \frac{1}{3}$, τότε $C = \left\{\left(-\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\right)\right\}$

32

12

Έστω τώρα ότι $a < \frac{1}{3}$. Άρα αν $(x\ y) \in C_{c_0}$ τότε

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 = \frac{1}{3} - a$ (1) όπου $\frac{1}{3} - a > 0$. Θέτουμε:

$\theta_0 := \frac{1}{3} - a$ και τότε $\theta_0 > 0$.

Άρα η (1) γίνεται ισοδύναμα:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ όπου $a = \sqrt{2\theta_0}$, $b = \sqrt{\frac{2\theta_0}{3}}$ και $a > b$.

Θέτουμε $\gamma = 2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}$.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η C_{c_0} είναι έλλειψη με σταθερό άθροισμα $2a = 2\sqrt{2\theta_0}$, και εστίες $(\gamma, 0)$, $(-\gamma, 0)$ όπου $\gamma = 2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}$.

Άρα η αρχική μας καμπύλη C είναι η έλλειψη με σταθερό άθροισμα $2\sqrt{2\theta_0}$ και εστίες τις

$E_1 = (g^{-1} \circ t_{c_0})((\gamma\ \ 0))$ και $E_2 = g_0^{-1}((-\gamma\ \ 0))$.

Υπολογίζοντας έχουμε:

$$E_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)$$ και

$$E_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right).$$

Επαλήθευση (Στο διαγώνισμα να μην γίνει)

Θα επαληθεύσουμε τώρα ότι η έλλειψη με τις παραπάνω εστίες E_1, E_2 και σταθερό άθροισμα $2a=2\sqrt{2\theta_0}$ έχει εξίσωση:

$$x^2+xy+y^2+x+y+a=0$$

Έχουμε:

Έστω

$C_{E_1,E_2,a}$ να είναι η έλλειψη με εστίες E_1, E_2, και σταθερό άθροισμα $2a$, δηλαδή:

$C_{E_1,E_2,a}=\{M\in\mathbb{R}^{1\times 2} \mid d(M,E_1)+d(M,E_2)=2a\}$ όπου

$d(M,E_1)=\|M-E_1\|$, $d(M,E_2)=\|M-E_2\|$.

(34) (14)

Θα δείξουμε ότι: $C = C_{E_1, E_2, a}$.

Έστω $M = (x\ y) \in C_{E_1, E_2, a}$.

Τότε έχουμε:

$$d(M, E_1) + d(M, E_2) = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|M - E_1\| + \|M - E_2\| = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|M - E_1\| = 2a - \|M - E_2\| \quad (1).$$

$$\Rightarrow \|M - E_1\|^2 = (2a - \|M - E_2\|)^2 \Rightarrow \text{Έχουμε: } \|M - E_1\|^2 =$$

$$\left\| (x\ y) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right) \right\|^2$$

$$= \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)^2 + \left(y + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right)^2$$

$$= x^2 + \frac{1}{2} \left(4\frac{\theta_0}{3} + \frac{2}{9} - 4\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}\, \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$$

$$- \frac{2x}{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) + y^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(4\frac{\theta_0}{3} + \frac{2}{9} + 4\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \right) + \frac{2y}{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$$

35

$$= x^2+y^2 + 4\frac{\theta_0}{3} + \frac{2}{9} +$$

$$- \sqrt{2}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)x + \sqrt{2}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)y \quad (2).$$

Έχουμε:

$$\|M - E_2\|^2 =$$

$$= \left\| (x \;\; y) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \;\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)\right\|^2$$

$$= \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)^2$$

$$= x^2 + \frac{1}{2}\left(4\frac{\theta_0}{3} + \frac{2}{9} + 4\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\right) +$$

$$+ \frac{2x}{\sqrt{2}}\cdot\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right) + y^2 + \frac{1}{2}\left(4\frac{\theta_0}{3} + \frac{2}{9} - 4\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$- 2\frac{y}{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) =$$

$$= x^2+y^2 + 4\frac{\theta_0}{3} + \frac{2}{9} + \sqrt{2}x\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$- \sqrt{2}y\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \quad (3)$$

36

16

Έτσι έχουμε

$$\|M-\bar{E}_1\|^2 = 4a^2 + \|M-\bar{E}_2\|^2 - 4a\|M-\bar{E}_2\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{\frac{4\theta_0}{3}} + \cancel{\frac{2}{9}} - \sqrt{2}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)x + \sqrt{2}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)y$$

$$= 4a^2 + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{\frac{4\theta_0}{3}} + \cancel{\frac{2}{9}} + \sqrt{2}\,x\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$- \sqrt{2}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)y - 4a\|M-\bar{E}_2\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}\,x + \cancel{\frac{2}{3}x} + 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}\,y + \cancel{\frac{2}{3}y}$$

$$= 4a^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}\,x + \cancel{\frac{2}{3}x} - 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}\,y + \cancel{\frac{2}{3}y} - 4a\|M-\bar{E}_2\|$$

$$\Rightarrow 4a\|M-\bar{E}_2\| = 4\sqrt{2}\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}\,x - 4\sqrt{2}\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}\,y + 4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\|M-\bar{E}_2\| = \sqrt{\frac{2\theta_0}{3}}\,(x-y) + a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2\|M-\bar{E}_2\|^2 = \left(\sqrt{\frac{2\theta_0}{3}}\,(x-y) + a^2\right)^2 \Rightarrow$$

(37)

$\Rightarrow$

$$a^2\left(x^2+y^2+4\frac{\theta_0}{3}+\frac{2}{9}+\sqrt{2}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)x-\sqrt{2}\left(2\sqrt{\frac{\theta_0}{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)y\right)$$

$$=\frac{2\theta_0}{3}(x-y)^2+a^4+2a^2\sqrt{\frac{2\theta_0}{3}}(x-y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2x^2+a^2y^2+4\frac{\theta_0}{3}a^2+\frac{2}{9}a^2+\cancel{2\sqrt{\frac{2\theta_0}{3}}a^2x}+\frac{2x}{3}a^2$$

$$\cancel{-2\sqrt{\frac{2\theta_0}{3}}ya^2}+\frac{2}{3}ya^2=$$

$$=\frac{2\theta_0}{3}x^2+\frac{2\theta_0}{3}y^2-4xy\frac{\theta_0}{3}+a^4+\cancel{2a^2\sqrt{\frac{2\theta_0}{3}}x}-\cancel{2a^2\sqrt{\frac{2\theta_0}{3}}y}$$

$\Rightarrow$

$$\left(2\theta_0-\frac{2\theta_0}{3}\right)x^2+\left(2\theta_0-\frac{2\theta_0}{3}\right)y^2+\frac{2}{3}2\theta_0x+\frac{2}{3}2\theta_0y+4\frac{\theta_0}{3}xy$$

$$+4\frac{\theta_0}{3}2\theta_0+\frac{2}{9}2\theta_0-(2\theta_0)^2=0.$$ Άρα έχουμε:

$$4\frac{\theta_0}{3}(x^2+y^2+xy+x+y)+\frac{8\theta_0^2}{3}+\frac{4}{9}\theta_0-4\theta_0^2=0$$

$$\Rightarrow 4\frac{\theta_0}{3}(x^2+y^2+xy+x+y)+\frac{4}{9}\theta_0-\frac{4}{3}\theta_0^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+xy+x+y+\left(\frac{1}{3}-\theta_0\right)=0$$

$\theta_0:=\frac{1}{3}-a$. Άρα $\frac{1}{3}-\theta_0=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}-a\right)=a$. Άρα

Άρα έχουμε

$$x^2+xy+y^2+x+y+a=0.$$

Άρα πράγματι έχουμε ότι η έλλειψη $C_{E_1,E_2,a}$ που βρήκαμε έχει εξίσωση:

$$x^2+xy+y^2+x+y+a=0.$$

Να ευρεθεί τι παριστάνει η εξίσωση:
$x^2+2xy+y^2+ax+by+\gamma=0$ για τις διάφορες τιμές των $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ και να γραφούν τα χαρακτηριστικά της.

Λύση

Αν $a=b=\gamma=0$, τότε $(x+y)^2=0 \Rightarrow x+y=0$ και είναι η ευθεία με εξίσωση $x+y=0$.

Επίσης αν $a=b=0$ και $\gamma>0$ τότε προφανώς δεν υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης.
Έστω τώρα ότι $\gamma<0$ και $a=b=0$. Τότε η εξίσωση γίνεται: $(x+y)^2=|\gamma| \Rightarrow x+y=\pm\sqrt{|\gamma|}$
και η εξίσωση παριστάνει τις δύο ευθείες με εξισώσεις:
$x+y=|\gamma|$ και $x+y=-|\gamma|$.
Θα μελετήσουμε τώρα την περίπτωση όπου:
$a\cdot b\cdot\gamma\neq 0$.
Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή της εξίσωσης, δηλαδή την $q:\mathbb{R}^{1\times2}\to\mathbb{R}$ με τύπο:
$$q((x\ y))=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2 \text{ για κάθε }$$
$(x\ y)\in\mathbb{R}^{1\times2}$.

40

Ο πίνακας A της φ είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Ο πίνακας $A - \lambda I_2$ για $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι

ο $$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι 0 και 2.

Θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ με τύπο:

$\varphi((x\ y)) = (x\ y) \cdot A$ για κάθε $(x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Ο τύπος

της φ είναι ο

$$\varphi((x\ y)) = (x\ y) \cdot A = (x\ y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= (x+y \quad x+y)$. Όπως έχουμε δείξει η φ έχει

τις ιδιοτιμές 0 και 2 του πίνακα A.

(41)

Ιδιοδιανύσματα της φ

Έστω (x_1, y_1) να είναι ενα ιδιοδιάνυσμα της φ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0. Τότε έχουμε:

$$\varphi((x_1, y_1)) = 0 \cdot (x_1, y_1) \Leftrightarrow (x_1+y_1, x_1+y_1) = (0, 0).$$

Άρα $y_1 = -x_1$. Άρα ο ιδιόχωρος $V(0)$ της φ είναι ο $V(0) = \{ (x, -x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \langle (1, -1) \rangle$

Έστω (x_2, y_2) να είναι ενα ιδιοδιάνυσμα της φ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 2. Τότε έχουμε:

$$\varphi((x_2, y_2)) = 2(x_2, y_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_2+y_2, x_2+y_2) = (2x_2, 2y_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2+y_2 = 2x_2 \Rightarrow y_2 = x_2.$$ Άρα

$$V(2) = \{ (x, x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 1) \rangle.$$

Κανονικοποίηση των ιδιοδιανυσμάτων

Θέλουμε $x \in \mathbb{R}$: $\|x(1, -1)\| = 1 \Rightarrow x^2 \|(1, -1)\|^2 = 1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \cdot (1^2 + (-1)^2) = 1 \Rightarrow$ για $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ έχουμε το ιδιοδιάνυσμα $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ της ιδιοτιμής 0.

(42) (4)

Θέλουμε $x \in \mathbb{R}$: $\|x(1\ \ 1)\| = 1$. Παρόμοια για την ιδιοτιμή 2 το $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ δίνει το ιδιοδιάνυσμα $\frac{1}{\sqrt{2}}(1\ \ 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Προφανώς το $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in V(0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in V(2)$ και τα διανύσματα $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{1\times 2}$, όπως έχουμε δείξει στη θεωρία.

<u>Ορίζουμε τον πίνακα</u> $P := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ο P είναι ορθογώνιος και

<u>ορίζει την ισομετρία $g: \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ με τύπο:</u>

$g((x\ y)) = (x\ y) \cdot P^t \quad \forall (x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Έχουμε:

$g((x\ y)) = (x\ y) \cdot P^t = (x\ y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$

(43) (5)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (x\ y) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x-y \quad x+y) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \right).$$

Βρίσκουμε και τον τύπο της g^{-1}. Η $g^{-1}: \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ με τύπο: $g^{-1}((x\ y)) = (x\ y)\cdot P \ \forall (x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Άρα

$$g^{-1}((x\ y)) = (x\ y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (x\ y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x+y \quad y-x) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x) \right).$$

Οι συντεταγμένες συναρτήσεις g_1 και g_2 της g είναι οι $g_1: \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$ και $g_2: \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}$ με τύπους

$$g_1((x\ y)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \text{ και } g_2((x\ y)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

$\forall (x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

(6)

(44)

Το γραμμικό μέρος της αρχικής συνάρτησης είναι το $ax+by$.

Ψάχνουμε $\gamma_0, \delta_0 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\gamma_0 g_1((x\ y)) + \delta_0 g_2((x\ y)) = ax+by \ , \forall (x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2} \ (*)$$

Από την $(*)$ για $(x\ y) = e_1 = (1\ 0)$ έχουμε:

$$\gamma_0 \cdot g_1((1\ 0)) + \delta_0 \cdot g_2((1\ 0)) = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma_0 \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta_0 \frac{1}{\sqrt{2}} = a \Leftrightarrow \gamma_0 + \delta_0 = \sqrt{2}\, a \ (1)$$

Από την $(*)$ για $(x\ y) = e_2 = (0\ 1)$ έχουμε:

$$\gamma_0 \cdot g_1((0\ 1)) + \delta_0 \cdot g_2((0\ 1)) = b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma_0 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \delta_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\ b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\gamma_0 + \delta_0 = \sqrt{2}\, b \ (2).$$

Άρα για να βρούμε τα γ_0, δ_0 πρέπει να λύσουμε το γραμμικό σύστημα των

$\gamma_0 + \delta_0 = \sqrt{2}\, a$ και

$-\gamma_0 + \delta_0 = \sqrt{2}\, b$. Παίρνουμε $\gamma_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$ και $\delta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

(45) (7)

Θέτουμε:

$$C := \{ (x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2} \mid x^2 + 2xy + y^2 + ax + by + \gamma = 0 \}$$ και

$$C' := \{ (x\ y) \in \mathbb{R}^{1\times 2} \mid 2y^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)x + \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)y + \gamma = 0 \}$$

Έχουμε δείξει στη θεωρία ότι:

$$C = g^{-1}(C').$$

Έστω $c_0 = (c_1\ c_2) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ και η μεταφορά $t_{c_0} : \mathbb{R}^{1\times 2} \to \mathbb{R}^{1\times 2}$ με τύπο: $t_{c_0}(v) = c_0 + v$, $\forall v \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

Θέτουμε $C_{c_0} := t_{c_0}^{-1}(C')$. Έστω $u = (u_1\ u_2) \in C_{c_0}$.

Έχουμε: $t_{c_0}(u) \in C' \Rightarrow (c_1\ c_2) + (u_1\ u_2) \in C'$

$$\Rightarrow (c_1 + u_1\ \ c_2 + u_2) \in C' \Rightarrow$$

$$2(c_2+u_2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)(c_1+u_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)(c_2+u_2) + \gamma = 0$$

$$\Rightarrow 2u_2^2 + \left(4c_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\right)u_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)u_1 +$$

$$+ \left(2c_2^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)c_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)c_2 + \gamma\right) = 0$$

(416)

Επιλέγουμε c_0:

$$4c_2+\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)=0 \text{ και}$$

$$2c_2^2+\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)c_1+\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)c_2+\gamma=0.$$

Παίρνουμε $c_2=-\frac{\sqrt{2}}{8}(a+b)$ και

$$c_1=\frac{\frac{1}{16}(a+b)^2-\gamma}{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)}.$$

Για τις παραπάνω τιμές των c_1, c_2 έχουμε ότι:

$$C_{c_0}=\left\{(x\ y)\in\mathbb{R}^{1\times 2} \,\middle|\, 2y^2+\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)x=0\right\}.$$

Έτσι έχουμε: $C'=t_{c_0}(C_{c_0})$ και άρα:

$$C=(g^{-1}\circ t_{c_0})(C_{c_0}).$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

1) $a=b$. Τότε έχουμε $y=0$, δηλαδή $C_{c_0}=\{(x\,y)\in\mathbb{R}^{1\times 2} \mid y=0\}$ δηλαδή η C_{c_0} είναι η ευθεία με εξίσωση $y=0$ και άρα η C είναι η ευθεία $C=(g^{-1}\circ t_{c_0})(C_{c_0})$ δηλαδή είναι και

αυτή μια ευθεία.

Ενδιαφέρον έχει η περίπτωση

2) $a \neq b$. Τότε έχουμε

$$y^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(b-a)x$$, που είναι εξίσωση παραβολής

με παράμετρο $p = \frac{\sqrt{2}}{8}(b-a)$, εστία το σημείο

$E = \left(\frac{\sqrt{2}}{16}(b-a), 0\right)$ και διευθετούσα δ την

ευθεία με εξίσωση: $x = -\frac{\sqrt{2}}{16}(b-a) = \frac{\sqrt{2}(a-b)}{16}$

Θα προσδιορίσουμε τώρα τα χαρακτηριστικά της C.

Γνωρίζουμε ότι η σύνθεση ισομετριών είναι ισομετρία.

Έτσι επειδή οι συναρτήσεις g^{-1} και t_{c_0} είναι ισομετρίες η συνάρτηση $g^{-1} \circ t_{c_0}$ είναι ισομετρία.

Η g^{-1} μάλιστα είναι γραμμική ισομετρία.

Επίσης ισχύει (το δεχόμαστε χωρίς απόδειξη) ότι μια ισομετρία απεικονίζει παραβολές σε παραβολές και μάλιστα ισχύει το εξής:

Έστω $C_{E,\delta}$ να είναι μια παραβολή με εστία E και διευθετούσα δ. Τότε αν T είναι μια ισομετρία και

(48) (10)

Επί συνάρτηση τότε ισχύει ότι:

$$T(C_{E,\delta}) = C_{T(E),T(\delta)}$$, δηλαδή η

εικόνα $T(C_{E,\delta})$ της παραβολής $C_{E,\delta}$ μέσω της ισομετρίας T είναι η παραβολή $C_{T(E),T(\delta)}$ με εστία $T(E)$ και διευθετούσα $T(\delta)$. Έτσι η ισομετρία μας δίνει την πληροφορία όχι μόνο ότι η εικόνα παραβολής είναι παραβολή αλλά και τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα της εικόνας, δηλαδή την εστία της και την διευθετούσα της.

Εφαρμόζουμε το παραπάνω στο συγκεκριμένο μας παράδειγμα και έχουμε ότι:

Η εστία της παραβολής C είναι το σημείο:

$$(g^{-1}\circ t_{c_0})(E) = (g^{-1}\circ t_{c_0})\left(\frac{\sqrt{2}}{16}(b-a),\ 0\right) =$$

$$= g^{-1}\left(t_{c_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{16}(b-a),\ 0\right)\right) =$$

$$= g^{-1}\left(\frac{ab-48}{2\sqrt{2}(a-b)},\ -\frac{\sqrt{2}}{8}(a+b)\right)$$

419

$$= \left(\frac{b^2-a^2+2ab-8\gamma}{8(a-b)} , \frac{b^2-a^2-2ab+8\gamma}{8(a-b)} \right)$$

Η διευθετούσα της αρχικής έλλειψης C είναι η $(g^{-1} \circ t_{c_0})(\delta)$ όπου δ είναι η ευθεία με εξίσωση: $x = \frac{\sqrt{2}}{16}(a-b)$.

Άρα $\delta := \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{16}(a-b) \quad y \right) \mid y \in \mathbb{R} \right\}$.

Για τυχόν στοιχείο $\left(\frac{\sqrt{2}}{16}(a-b) \quad y \right)$, $y \in \mathbb{R}$ της δ έχουμε:

$$t_{c_0}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{16}(a-b) \quad y \right) \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{16}(a-b) + c_1 \quad y + c_2 \right) =$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{8}(a^2+b^2) - \gamma}{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)} \quad y + c_2 \right).$$ Επειδή το c_2 είναι μια σταθερά και όταν το y διατρέχει όλο το $\mathbb{R}$ έπεται και ότι το $y+c_2$ διατρέχει όλο το $\mathbb{R}$ έπεται ότι: η $t_{c_0}(\delta)$ είναι η ευθεία με εξίσωση:

$$x = \frac{\frac{1}{8}(a^2+b^2) - \gamma}{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)}$$

(50)

Έστω τυχόν διάνυσμα

$$\left(\frac{\frac{1}{8}(a^2+b^2)-\gamma}{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)} \;,\; y \right) \in t_{c_0}(\delta) \text{ για κάποιο}$$

$y \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$g^{-1}\left(\left(\frac{\frac{1}{8}(a^2+b^2)-\gamma}{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)} \quad y \right) \right) =$$

$= t_{c'}(\ell)$ όπου c' είναι το διάνυσμα

$$c' = \left(\frac{\frac{1}{8}(a^2+b^2)-\gamma}{a-b} \quad - \frac{\frac{1}{8}(a^2+b^2)-\gamma}{a-b} \right)$$

και ℓ είναι η ευθεία $\ell = (u_0)$ που παράγεται από το διάνυσμα $u_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ και γράψαμε την ζητούμενη διευθετούσα της παραβολής C στην διανυσματική μορφή ευθείας που γνωρίζουμε.

51 (13)

Ας δούμε τώρα μια συγκεκριμμένη εφαρμογή.

Ας πάρουμε $a=16$, $b=8$, $\gamma=64$.

Τότε από τα παραπάνω παίρνουμε ότι η εστία της παραβολής είναι η

$(g^{-1}\circ t_{c_0})(E)=(-7 \quad 1)$ και το διάνυσμα c' της διευθετούσας $(g^{-1}\circ t_{c_0})(\delta)$ είναι το $c'=(-3 \quad 3)$

Άρα ένα σημείο της διευθετούσας $\delta'=(g^{-1}\circ t_{c_0})(\delta)$ της καμπύλης C είναι το $(-3 \quad 3)$ και ένα άλλο είναι ας πούμε το

$$c'+\sqrt{2}\,u_0=(-3 \quad 3)+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=(-3 \quad 3)+(1 \quad 1)=(-2 \quad 4).$$

Άρα η δ' διέρχεται από τα $(-3 \quad 3)$ και $(-2 \quad 4)$ και άρα η εξίσωσή της σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι η

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{ως γνωστόν}$$

από την αναλυτική γεωμετρία, δηλαδή:

$-x+y-6=0$.

Άρα η διευθετούσα δ' της C έχει εξίσωση

$-x+y-6=0$ και η εστία είναι η $E'=(-7\ 1)$.

Ας κάνουμε τώρα επαλήθευση βρίσκοντας την εξίσωση της παραβολής.

<u>Επαλήθευση</u> :

Έστω $M=(x\ y)$ να είναι ένα σημείο της παραβολής που έχει εστία το E' και διευθετούσα την δ'.

Τότε ισχύει: $d(M, E')=d(M, \delta')$. Αλλά

$$d(M, E')=\|M-E'\|=\|(x\ y)-(-7\ 1)\|=$$

$$=\|(x+7\quad y-1)\|.$$ Άρα

$$d(M, E')^2=(x+7)^2+(y-1)^2 \quad (1).$$

Από την αναλυτική γεωμετρία ξέρουμε ότι

$$d(M, \delta')=\frac{|-x+y-6|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\frac{|-x+y-6|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$d(M, \delta')=\frac{(-x+y-6)^2}{2} \quad (2).$$

(53) (15)

Απο τις (1) και (2) $\Rightarrow$

$$(x+7)^2+(y-1)^2=\frac{(-x+y-6)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left((x+7)^2+(y-1)^2\right)=(-x+y-6)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(x^2+14x+49+y^2-2y+1)=$$

$$=x^2+y^2+36-2xy+12x-12y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+28x+98+2y^2-4y+2=$$

$$=x^2+y^2+36-2xy+12x-12y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2xy+y^2+16x+8y+64=0.$$

Έτσι πράγματι βρήκαμε και επαληθεύσαμε ότι η παραβολή με εξίσωση:

$x^2+2xy+y^2+16x+8y+64=0$ έχει εστία το σημείο $E'=(-7\ 1)$ και διευθετούσα δ' με καρτεσιανή εξίσωση: $-x+y-6=0$.